

Analiza Matematyczna 3, Wydział Matematyki, lista 6

Zad. 1. Wiadomo, że sfera $S: x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ nie jest powierzchnią prostą (płatem powierzchniowym). Wykaż, że dolna półsfera $S^-: x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, z \leq 1$ jest powierzchnią prostą.

Wsk. Można użyć parametryzacji wykorzystującej tzw. rzut stereograficzny (z bieguna północnego sfery prowadzi się proste przecinające płaszczyznę $Oxy \dots$).

Zad. 2. Znajdź pole wersorów normalnych wzdłuż

- (a) powierzchni $S: -2x^2 - y^2 + z^2 = 1, x \geq 0$;
- (b) powierzchni o parametryzacji $r(\varphi, z) = (f(z) \cos \varphi, f(z) \sin \varphi, z)$, $(\varphi, z) \in [0, 2\pi] \times [a, b]$, f jest funkcją dodatnią i klasy C^1 na przedziale $[a, b]$ (powierzchnia obrotowa);
- (c) powierzchni o parametryzacji $r(u, v) = ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v)$, $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, $a, b = \text{const.}, 0 < b < a$ (torus).

Zad. 3. Wyznacz płaszczyznę styczną i prostą normalną do

- (a) powierzchni $S: y = z^2 - x^2$ w punktach, w których płaszczyzna ta jest równoległa do płaszczyzny $y + z = 0$;
- (b) powierzchni obrotowej z zadania 2(b) dla $f(z) = e^{z-1}$, w punktach, w których płaszczyzna ta jest prostopadła do prostej określonej warunkami $y = 0, x + z = 0$.

Zad. 4. Wyznacz element powierzchni i oblicz pole

- (a) powierzchni $S: x^2 + y^2 + z - 2 = 0, z \geq 1$;
- (b) powierzchni z zadania 2(b) i 2(c).

Zad. 5. Załóżmy, że Γ jest krzywą płaską, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) jej parametryzacją kawałkami gładką i f jest dodatnią funkcją klasy C^1 na pewnym otoczeniu zawierającym krzywą Γ . Tworzymy powierzchnię

$$S: r(t, u) = (x(t), y(t), u f(x(t), y(t))), \quad \alpha \leq t \leq \beta, 0 \leq u \leq 1.$$

Wykaż, że powierzchnia S ma pole równe całce krzywoliniowej niezorientowanej $\int_{\Gamma} f(x, y) ds$.

Zad. 6. Oblicz całki powierzchniowe niezorientowane

- (a) $\iint_S (3z + 6x + 4y) dS$, gdzie S jest tą częścią płaszczyzny $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$, która zawarta jest w pierwszym oktancie układu współrzędnych,
- (b) $\iint_S x dS$, gdzie S jest tą częścią sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, która zawarta jest w pierwszym oktancie układu współrzędnych,
- (c) $\iint_S y dS$, gdzie S jest półsferą $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$,

Zad. 7. Oblicz

- (a) współrzędne środka ciężkości powierzchni całkowitej walca $S: x^2 + y^2 = r^2, 0 \leq z \leq h$, $r, h = \text{const.} > 0$, jeśli gęstość powierzchniowa masy jest postaci $\rho(x, y, z) = z$.
- (b) współrzędne środka ciężkości części stożka $x^2 + y^2 = R^2 z^2 / H^2$ odciętej płaszczyzną $z = H$, gdzie $R, H = \text{const.} > 0, \rho = 1$.

Zad. 8. Oblicz całkę

- (a) $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$,

gdzie $S: z = xy, 0 \leq x, y \leq 1$, a górna strona powierzchni S jest dodatnia.

(b) $\int_S x^2 y^2 z \, dx dy,$

gdzie S jest górną powierzchnią dolnej połowy sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,

Zad. 9. Korzystając ze wzoru Gaussa-Ostrogradskiego, oblicz całki powierzchniowe zorientowane:

(a) $\int_S xz \, dx dy + xy \, dy dz + yz \, dx dy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną ostrosłupa, ograniczonego płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$,

(b) $\int_S yz \, dx dy + xz \, dy dz + xy \, dx dy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni, leżącej w I oktancie układu współrzędnych i złożonej z walca $x^2 + y^2 = R^2$ i płaszczyzn $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, oraz $z = H$,

Zad. 10. $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, jest parametryzacją krzywej Γ .

Wyznacz całkę $\int_{\Gamma} z \, dx + 2x \, dy + y^2 \, dz$

(a) bezpośrednim rachunkiem;

(b) korzystając z twierdzenia Stokesa.

Zad. 11. Niech $\vec{a}$ będzie polem wektorowym klasy C^1 na pewnym obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Potencjałem wektorowym pola $\vec{a}$ nazywamy każde pole wektorowe $\vec{b}$ takie, że $\text{rot } \vec{b} = \vec{a}$. Mówimy wówczas, że pole $\vec{a}$ ma potencjał wektorowy. Udowodnij, że

(a) jeśli pole $\vec{a}$ ma potencjał wektorowy, to $\text{div } \vec{a} = 0$;

(b*) na odwrót, jeśli $\text{div } \vec{a} = 0$, to dowolny punkt $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ posiada otoczenie, na którym pole $\vec{a}$ ma potencjał wektorowy, przy czym jest on zadany wzorem

$$\vec{b} = \left(0, \int_{x_0}^x a_3(x, y, z) \, dx, - \int_{x_0}^x a_2(x, y, z) \, dx + \int_{y_0}^y a_1(x_0, y, z) \, dy \right) + \nabla f,$$

gdzie $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i f jest dowolną funkcją skalarną klasy C^2 .

Zad. 12. Sprawdź, czy pole

(a) $\vec{a} = (xz, -yz, y)$;

(b) $\vec{a} = (2|x|, |y|, |z|)$ posiada potencjał wektorowy i ewentualnie znajdź ten potencjał. Na jakich obszarach jest to możliwe?

Zad. 13.* Zdefiniujmy dla funkcji $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ operator Laplace'a $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ i niech $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}$ oznacza pochodną kierunkową funkcji f w kierunku zewnętrznego wektora normalnego do powierzchni w danym punkcie. Niech V będzie obszarem spełniającym założenia twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego, S jego brzegiem zorientowanym zewnętrznym i f, g funkcjami klasy C^2 na V . Udowodnij wzory całkowe

(a) $\iiint_V (\langle \nabla f, \nabla g \rangle + g \Delta f) \, dx \, dy \, dz = \iint_S g \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \, dS;$

(b) $\iiint_V (g \Delta f - f \Delta g) \, dx \, dy \, dz = \iint_S \left(g \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} - f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} \right) \, dS;$

(c) $\iiint_V \Delta f \, dx \, dy \, dz = \iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \, dS.$

Ponadto: Sugeruję przerobić zadania ze skryptu ogólnouczelnianego dotyczące całek powierzchniowych oraz twierdzeń Gaussa-Ostrogradzkiego i Stokesa.